

ÍNDICE SISTEMÁTICO

	<u>PÁGINA</u>
Sumario	5
Prólogo	7
Capítulo 1. Funciones reales de una variable real. Límites y continuidad	9
Objetivos del capítulo	11
1. Topología de la recta real	12
1.1. Intervalos	12
1.2. Entornos	13
1.3. Conjuntos acotados	14
2. Funciones reales de una variable real	15
2.1. Definiciones	15
2.1.1. Crecimiento y decrecimiento	15
2.1.2. Acotación y extremos	16
2.2. Operaciones con funciones	16
2.2.1. Operaciones algebraicas	16

2.2.2. Composición de funciones	17
2.2.3. Función inversa	17
2.3. Funciones elementales	18
3. Límites de funciones	20
3.1. Definiciones	20
3.1.1. Límite de una función en un punto	20
3.1.2. Límites laterales	21
3.1.3. Límites infinitos	22
3.1.4. Límites en el infinito	23
3.1.5. Propiedades algebraicas de los límites	25
3.2. Cálculo de límites	25
3.2.1. Cálculo elemental de límites	25
3.2.2. Dos reglas para el cálculo de límites	29
3.2.3. Un límite muy importante	29
3.3. Infinitésimos e infinitos	30
3.3.1. Infinitésimos	30
3.3.2. Infinitésimos equivalentes	30
3.3.3. Infinitos	31
3.4. Asíntotas	32
4. Continuidad	35
4.1. Definiciones	35
4.1.1. Continuidad de una función en un punto	35
4.1.2. Tipos de discontinuidad	35
4.1.3. Continuidad lateral	37
4.1.4. Propiedades de la continuidad	37
4.1.5. Aclaraciones sobre funciones continuas	39
4.2. Propiedades	40
4.2.1. Teorema del signo de una función continua	40
4.2.2. Teorema de Bolzano	40
4.2.3. Aplicación del teorema de Bolzano al cálculo aproximado de raíces de una ecuación	41
4.2.4. Teorema de los valores intermedios de Darboux	42
4.2.5. Teorema del máximo-mínimo de Weierstrass	43
Anexo I. Descomposición en fracciones simples	44

Anexo II. Anotaciones elementales sobre complejos	49
1. Tipos de números	49
1.1. Números naturales	49
1.2. Número enteros	50
1.3. Numeros racionales	50
1.4. Números reales	51
1.5. Números complejos	51
1.5.1. Operaciones básicas	52
1.5.2. Forma polar	53
1.5.3. Propiedades	54
1.5.4. Ejercicios	55
Conceptos básicos	57
Actividades de autocomprobación	57
Referencias bibliográficas	62
Capítulo 2. Derivación de funciones de una variable real	63
Objetivos del capítulo	65
1. La derivada	66
1.1. Derivada de una función en un punto	66
1.1.1. Definición	66
1.1.2. Interpretación geométrica de la derivada	66
1.1.3. Derivada y continuidad	67
1.1.4. Derivadas laterales	67
1.1.5. Derivada de funciones definidas a trozos	68
1.2. Función derivada	68
1.2.1. Definición	68
1.2.2. Derivadas sucesivas	68
1.2.3. Derivadas de operaciones con funciones	69
1.3. Cálculo de derivadas	69
1.3.1. Cálculo elemental de derivadas	69
1.3.2. Derivación implícita	71
1.3.3. Derivación logarítmica	71
1.3.4. Fórmula de Leibniz	72

2. Aplicaciones de la derivada. La diferencial	73
2.1. Aplicación geométrica de la derivada	73
2.2. Aplicación física de la derivada	75
2.3. Aproximación de una función. La diferencial	76
2.3.1. Aproximación de una función	76
2.3.2. La diferencial	76
2.3.3. El método de Newton-Raphson para el cálculo de raíces	77
3. Propiedades locales. Representación gráfica de funciones	79
3.1. Crecimiento y extremos	79
3.1.1. Criterio de la derivada primera para crecimiento y extremos relativos	79
3.1.2. Criterio de la derivada segunda para extremos relativos	80
3.1.3. Intervalos de crecimiento	80
3.1.4. Extremos absolutos	80
3.2. Concavidad	82
3.2.1. Concavidad y puntos de inflexión	82
3.2.2. Criterio de la derivada segunda para concavidad y puntos de inflexión	83
3.2.3. Criterio de la derivada tercera para puntos de inflexión	83
3.2.4. Intervalos de concavidad	83
3.3. Representación gráfica de funciones	84
4. Problemas de optimización	85
5. Teoremas de valor medio. Regla de L'Hôpital. Polinomios de Taylor	87
5.1. Teoremas de valor medio	87
5.1.1. Teorema de Rolle	87
5.1.2. Teorema de Cauchy	88
5.1.3. Teorema de valor medio	89
5.1.4. Propiedades	89
5.2. Regla de L'Hôpital	90
5.2.1. Teorema	90
5.2.2. Cálculo de límites	90
5.3. Polinomios de Taylor	92
5.3.1. Aproximación de funciones por polinomios	92
5.3.2. Polinomio de Taylor	92

5.3.3. Fórmula de Taylor	93
5.3.4. Polinomio de McLaurin	95
5.3.5. Fórmula de McLaurin	95
Conceptos básicos	97
Actividades de autocomprobación	97
Referencias bibliográficas	104
Capítulo 3. Integración de funciones de una variable real	105
Objetivos del capítulo	107
1. La integral de Riemann	108
1.1. Definición de la integral de Riemann	108
1.1.1. Particiones de un intervalo	108
1.1.2. Sumas de Riemann	109
1.1.3. Integrabilidad de Riemann	110
1.1.4. Criterio de integrabilidad Riemann. Funciones integrables ..	110
1.1.5. Propiedades de la integral	111
1.1.6. Interpretación geométrica de la integral	111
1.2. Teorema fundamental del cálculo	112
1.2.1. Teorema	112
1.2.2. Corolario	113
1.2.3. Primitiva o antiderivada	113
1.2.4. Regla de Barrow	113
1.3. Teorema de valor medio	114
1.3.1. Teorema de valor medio integral	115
1.3.2. Valor medio de una función	115
2. Cálculo de primitivas	115
2.1. Primitivas inmediatas	116
2.2. Métodos elementales de integración	117
2.2.1. Integración por cambio de variable	118
2.2.2. Integración por partes	118
2.2.3. Integrales de funciones racionales	119
2.2.4. Integrales de algunas funciones trigonométricas	122
2.2.5. Integrales de algunas funciones irracionales	124

3. Integrales impropias	124
3.1. Definiciones	124
3.1.1. Integral impropia de primera especie	125
3.1.2. Integral impropia de segunda especie	125
3.1.3. Integral impropia general	126
3.2. Comparación de integrales	127
3.2.1. Criterio de comparación	128
4. Aplicaciones de la integral	128
4.1. Áreas planas	128
4.2. Volúmenes y áreas de revolución	130
4.3. Longitudes de curvas	131
Conceptos básicos	133
Actividades de autocomprobación	133
Referencias bibliográficas	138
Capítulo 4. Curvas y superficies	139
Objetivos del capítulo	141
1. Cónicas	142
1.1. La circunferencia	142
1.2. La elipse	144
1.2.1. Ecuaciones de la elipse	144
1.2.2. Las leyes de Kepler	146
1.2.3. Tangente a la elipse	147
1.2.4. Propiedad de reflexión	147
1.3. La hipérbola	148
1.4. La parábola	150
1.4.1. Ecuación reducida de la parábola	150
1.4.2. Ecuaciones de otras parábolas con directrices paralelas a los ejes coordenados	151
1.4.3. Ecuación general de la parábola a partir del vértice y un punto	152
1.4.4. Propiedades de la parábola	152

2. Curvas paramétricas	154
2.1. Curvas en forma paramétrica	154
2.1.1. Definiciones	154
2.1.2. Observación	155
2.1.3. Algunas parametrizaciones de curvas	155
2.1.4. Curva contraria	159
2.2. Curvas suaves	159
2.2.1. Definiciones	159
2.2.2. Curvas suaves planas	159
3. Curvas en coordenadas polares	161
3.1. Coordenadas polares	161
3.2. Definición y propiedades	161
3.2.1. Ecuación polar de una curva	161
3.2.2. Propiedades de tangencia	163
4. Curvas notables	165
5. Superficies	170
5.1. El espacio \mathbb{R}^3	170
5.1.1. Sistema de referencia cartesiano	170
5.1.2. Superficies	171
5.1.3. Representación gráfica de superficies	171
5.2. Planos, esferas y cilindros	172
5.2.1. Planos	172
5.2.2. Esferas	173
5.2.3. Cilindros	174
5.3. Superficies cuádricas	175
5.3.1. Elipsoide	176
5.3.2. Hiperboloide de una hoja	176
5.3.3. Hiperboloide de dos hojas	177
5.3.4. Cono elíptico	178
5.3.5. Paraboloide elíptico	179
5.3.6. Paraboloide hiperbólico	179
Conceptos básicos	181
Actividades de auto comprobación	181
Referencias bibliográficas	186

Capítulo 5. Sucesiones y series	187
Objetivos del capítulo	190
1. Sucesiones numéricas	191
1.1. Definiciones y propiedades	191
1.1.1. Sucesión de números reales	191
1.1.2. Límite de una sucesión	192
1.1.3. Carácter de una sucesión	192
1.1.4. Tipos de sucesiones	193
1.1.5. Propiedades	193
1.1.6. Subsucesiones y propiedades	193
1.2. Cálculo de límites de sucesiones	194
1.2.1. Límites de operaciones con sucesiones	194
1.2.2. Límites de sucesiones como límites de funciones	194
1.2.3. Sucesiones equivalentes	195
1.2.4. Infinitos. Jerarquía de infinitos	196
1.2.5. Dos reglas para el cálculo de límites	197
1.2.6. Criterio de Stolz	199
1.3. Sucesiones recurrentes	201
2. Series numéricas	203
2.1. Definiciones y propiedades	203
2.1.1. Serie de números reales	203
2.1.2. Carácter de una serie	203
2.1.3. Propiedades	203
2.1.4. Condición necesaria de convergencia	204
2.2. Series sumables	205
2.2.1. Serie telescópica	205
2.2.2. Serie geométrica	206
2.2.3. Serie aritmético-geométrica	207
2.3. Criterios de convergencia	208
2.3.1. Criterio de comparación con la integral	208
2.3.2. Serie armónica generalizada	209
2.3.3. Criterio de comparación de Gauss	209
2.3.4. Criterio de comparación en el límite	209

2.3.5. Criterio de la raíz	210
2.3.6. Criterio del cociente	210
2.3.7. Criterio de Raabe	211
2.4. Series alternadas	211
2.4.1. Definición	211
2.4.2. Criterio de convergencia de series alternadas	212
2.4.3. Suma aproximada de series alternadas	212
3. Sucesiones de funciones	213
3.1. Definición	213
3.2. Convergencia puntual	213
3.3. Convergencia uniforme	214
3.3.1. Continuidad, acotación e integración de la función límite	214
4. Series de funciones	216
4.1. Definición	216
4.2. Convergencia puntual y uniforme	216
4.2.1. Definición	216
4.2.2. Continuidad, acotación e integración de la función límite	217
4.2.3. Criterio mayorante de Weierstrass para la convergencia uni- forme	217
5. Series de potencias	218
5.1. Definición y convergencia	218
5.1.1. Definición	218
5.1.2. Radio de convergencia	218
5.1.3. Convergencia de la serie de potencias	219
5.1.4. Campo de convergencia	219
5.1.5. Derivación e integración de series de potencias	220
5.2. Desarrollos en serie de potencias	223
5.2.1. Serie de Taylor	223
5.2.2. Series de potencias de algunas funciones elementales	224
6. Series de Fourier	224
6.1. Definición de la serie de Fourier clásica	224
6.2. Las series trigonométricas en modo complejo	225
6.3. Ejemplo	225

Conceptos básicos	227
Actividades de auto comprobación	227
Referencias bibliográficas	233
Capítulo 6. Funciones de varias variables reales	235
Objetivos del capítulo	237
1. Conceptos básicos	238
1.1. Nociones básicas de la topología de \mathbb{R}^n	238
1.2. Funciones reales de varias variables reales	239
2. Límites y continuidad	240
2.1. Límites de funciones de dos variables	240
2.1.1. Límite de una función de dos variables en un punto	240
2.1.2. Propiedades	240
2.1.3. Límites iterados y direccionales	242
2.1.4. Cálculo de límites en coordenadas polares	244
2.2. Límites de funciones de más de dos variables	245
2.3. Continuidad	246
2.3.1. Continuidad de una función en un punto	246
2.3.2. Tipos de discontinuidad	246
2.3.3. Propiedades	246
2.3.4. Teorema de los extremos de Weierstrass	247
3. Derivación	247
3.1. Derivadas parciales	247
3.1.1. Derivadas parciales de una función de dos variables	247
3.1.2. Interpretación geométrica y física	248
3.1.3. Derivadas parciales y continuidad	249
3.1.4. Derivadas parciales de funciones de más de dos variables ...	249
3.1.5. Derivadas parciales de orden superior	249
3.1.6. Igualdad de las derivadas parciales cruzadas	250
3.2. Diferenciación	250
3.2.1. Incrementos y diferenciales	250

3.2.2. Diferencial de una función en un punto	251
3.2.3. Condición necesaria y condición suficiente de diferenciabilidad	251
3.2.4. La diferencial como aproximación	251
3.2.5. Observación	252
3.3. La regla de la cadena. Derivación implícita	253
3.3.1. Regla de la cadena	253
3.3.2. Derivación implícita	254
3.4. Derivada direccional y gradiente	256
3.4.1. Derivada direccional de una función de dos variables	256
3.4.2. Gradiente de una función de dos variables	256
3.4.3. Propiedades	257
3.4.4. Derivada direccional y gradiente de una función de tres variables	257
3.5. Aplicaciones geométricas	258
3.5.1. Recta normal y plano tangente a una superficie	258
3.5.2. Recta tangente a una curva dada como intersección de dos superficies	259
4. Extremos	260
4.1. Extremos relativos y absolutos	260
4.1.1. Extremos relativos	260
4.1.2. Puntos críticos	261
4.1.3. Condición necesaria para extremos relativos	261
4.1.4. Criterio para la determinación de extremos	261
4.1.5. Extremos absolutos	265
4.2. Problemas de optimización	267
4.3. Multiplicadores de Lagrange	268
4.3.1. Extremos condicionados	268
4.3.2. El método de los multiplicadores de Lagrange	268
4.3.3. Criterio de la segunda derivada para extremos condicionados	271
Conceptos básicos	274
Actividades de auto comprobación	274
Referencias bibliográficas	281

Capítulo 7. Integración de funciones de varias variables reales.	
Análisis vectorial	283
Objetivos del capítulo	286
1. Integrales dobles	287
1.1. Integral doble de Riemann sobre rectángulos	287
1.1.1. Definición	287
1.1.2. Funciones integrables	288
1.1.3. Teorema de Fubini	288
1.2. Integrales dobles sobre otros recintos acotados	289
1.2.1. Definición	289
1.2.2. Integral doble sobre recintos proyectables	289
1.3. Cambio de variable	290
1.3.1. Cambio de variable a coordenadas polares	292
1.4. Aplicaciones	293
1.4.1. Volúmenes	293
1.4.2. Áreas planas	295
1.4.3. Masas y centros de gravedad	296
1.4.4. Áreas de superficies proyectables	297
2. Integrales triples	297
2.1. Integral triple de Riemann sobre rectángulos	297
2.1.1. Definición	297
2.1.2. Funciones integrables	298
2.1.3. Teorema de Fubini	298
2.2. Integrales triples sobre otros recintos acotados	299
2.2.1. Recintos proyectables	299
2.2.2. Recintos seccionables	300
2.3. Cambio de variable	301
2.3.1. Cambio de variable a coordenadas esféricas	303
3. Integrales múltiples impropias	304
4. Integrales de línea	305
4.1. Integral de línea de funciones reales	305
4.1.1. Definición de camino	305

4.1.2. Definición de integral de línea de funciones reales	305
4.1.3. Observaciones	306
4.2. Aplicaciones	306
5. Integrales de línea	307
5.1. Integrales de línea de campos vectoriales	307
5.1.1. Definición	307
5.1.2. Notación	307
5.1.3. Propiedades	308
5.1.4. Interpretación física	309
5.2. Independencia del camino	310
5.2.1. Definición	310
5.2.2. Segundo teorema fundamental del cálculo para integrales de línea	310
5.2.3. Consecuencias	310
5.2.4. Función potencial	311
5.2.5. Primer teorema fundamental del cálculo para integrales de línea	312
5.2.6. Teorema de caracterización	312
5.2.7. Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de función potencial	313
5.2.8. Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de función potencial en el plano	313
5.3. El teorema de Green-Riemann	315
6. Análisis vectorial	318
6.1. Introducción	318
6.2. Gradiente	318
6.2.1. Definición	319
6.3. Derivada direccional	319
6.3.1. Definición	320
6.4. Divergencia y rotacional	321
6.4.1. Definición de rotacional	321
6.4.2. Definición de divergencia	322
6.4.3. Teorema 1	323
6.4.4. Teorema 2	323
6.4.5. Diferencia entre divergencia y gradiente	323

6.5. Tabla de identidades comunes en el análisis vectorial	324
6.6. Integral de línea de primer tipo o a lo largo de una trayectoria	324
6.6.1. Definición	324
6.7. Integral de línea de segundo tipo	325
6.7.1. Definición	325
6.8. Teoremas del análisis vectorial	326
6.8.1. Teorema de Green	326
6.8.2. Teorema de Stokes	327
6.8.3. Teorema de Gauss	328
Conceptos básicos	330
Actividades de autocomprobación	330
Referencias bibliográficas	339
Capítulo 8. Ecuaciones diferenciales ordinarias I	341
Objetivos del capítulo	343
1. Introducción	344
1.1. Significado de las derivadas en las ecuaciones diferenciales	345
1.2. Tipos de ecuaciones diferenciales	347
1.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias	347
1.4. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales	350
1.5. Orden de una ecuación diferencial	351
2. Modelización de problemas	352
2.1. Modelización de un problema: la caída del paracaidista	352
2.2. Caso práctico: la apocalipsis zombi	355
2.3. Otros casos similares	357
3. Comprobación de resultados	362
4. Métodos elementales de resolución	365
4.1. Ecuaciones diferenciales separables	366
4.2. Ecuaciones diferenciales homogéneas	369
4.3. Otro tipo de ecuación resoluble por cambio de variable	371
4.4. El paracaidista	373

5. Ecuaciones exactas	375
5.1. Factores integrantes	377
6. Ecuaciones lineales de primer orden	379
6.1. Solución de una ecuación lineal	379
7. Ecuaciones reducibles a lineales	384
7.1. Ecuación de Bernoulli	384
7.2. Ecuaciones de Riccati	387
8. Dibujo aproximado de soluciones	390
9. Existencia y unicidad, prolongabilidad y estabilidad	393
9.1. Existencia, unicidad y prolongabilidad	393
9.2. Estabilidad	397
10. Ecuaciones autónomas	402
10.1. Definición y propiedades	402
10.2. Ejemplos	406
Conceptos básicos	411
Actividades de autocomprobación	411
Referencias bibliográficas	416
Capítulo 9. Ecuaciones diferenciales ordinarias II	417
Objetivos del capítulo	419
1. Introducción	420
2. Ecuaciones lineales de segundo orden	421
2.1. Superposición lineal	421
2.2. Problema de valores iniciales	422
2.3. Obtención de una solución particular si se conoce ya otra	426
3. Ecuaciones lineales de segundo orden de coeficientes constantes	427
3.1. Caso a) cuando se obtienen dos raíces reales	428
3.2. Caso b) cuando se obtiene una raíz doble	430
3.3. Caso c) cuando se obtienen dos raíces complejas conjugadas	432

3.4. Oscilador armónico	435
3.5. Problemas de contorno	438
3.6. Ecuación lineal no homogénea	440
3.6.1. Método de variación de las constantes	445
3.7. Oscilador armónico amortiguado forzado	446
3.7.1. Oscilador sin amortiguamiento	448
3.7.2. Oscilador amortiguado	450
3.8. Circuitos eléctricos	451
3.8.1. Circuito RL	454
3.8.2. Circuito RC	456
3.8.3. Circuito RCL	457
4. Ecuaciones lineales de coeficientes constantes de orden arbitrario	458
5. Ecuaciones lineales de coeficientes no constantes	461
5.1. Ecuación de Euler-Cauchy	461
5.2. Existencia y unicidad	462
6. Transformada de Laplace	463
6.1. Definición y propiedades	463
6.2. Resolución de ecuaciones diferenciales por transformada de Laplace ...	470
6.2.1. El problema de cómo calcular la antitransformada	472
6.3. Caso lineal no homogéneo de segundo orden	475
6.4. Algunos casos prácticos	476
Conceptos básicos	481
Actividades de autocomprobación	481
Referencias bibliográficas	485
Capítulo 10. Sistemas de ecuaciones diferenciales	487
Objetivos del capítulo	488
1. Introducción	489
2. Preámbulo de álgebra	489
2.1. Autovalores y autovectores	490
2.2. Diagonalización	493

3. Sistemas de ecuaciones de primer orden	495
3.1. Resolución de sistemas mediante variación de constantes	497
3.2. Resolución de sistemas mediante Laplace	503
4. Sistemas de ecuaciones autónomas	505
4.1. Mapas de fases	506
4.2. Clasificación de puntos críticos	510
4.3. Sistemas no lineales	516
4.4. Metodología	518
4.5. Ecuaciones autónomas de segundo orden	524
4.6. Ecuaciones y sistemas exactos	529
Conceptos básicos	533
Actividades de auto comprobación	533
Referencias bibliográficas	539

